

# Objektiv Denken V: *Phase-Root Locus*

Ernesto Rico-Schmidt

**Kurzfassung**— In diesem Artikel wird das Konzept des *phase-root locus* vorgestellt. Die Zusammenhänge zwischen dem “klassischen” *root locus* und dem *phase-root locus*, werden erläutert. Die so genannten Winkel- bzw. Betragsbedingungen für den *root locus* bzw. den *phase-root locus* werden eingeführt. Diese führen zu einer Alternative für das Zeichnen des *root locus* bzw. ermöglicht erst das Zeichnen des *phase-root locus*. Konzepte der relativen Stabilität, wie die *gain margin* und die *phase margin* sowie *gain-critical pole* und *phase-critical pole* werden anhand einiger Beispiele erläutert.

## EINLEITUNG

In der klassischen Analyse und Design von linearen zeitinvarianten Eingrößen-Systemen werden zwei Kriterien für die relative Stabilität verwendet, die *gain margin* und *phase margin*. Keine von beiden Grenzwerten allein ist ausreichend um Aussagen über die relative Stabilität zu treffen. Das *phase-root locus* ermöglicht in Zusammenhang mit dem “klassischen” *root locus* Aussagen über die relative Stabilität des geschlossenen Regelkreises.

## I. ROOT LOCUS (RL)

Der *root locus* stellt die Polstellen des geschlossenen Kreises in der  $s$ -Ebene dar, wenn man Verstärkung addiert (oder subtrahiert) und die addierte Phase konstant gleich Null lässt.

Daraus ergibt sich eine einfache Winkelbedingung:

$$\arg\{GH(s_{RL})\} = \pi l$$

wobei  $k_m GH(s)$  die Übertragungsfunktion des offenen Kreises ist, und  $l$  eine ungerade Zahl darstellt.

Beachte, dass der Parameter  $k_m$  (die Verstärkung, die addiert oder subtrahiert werden soll) gar nicht vorkommt.

email: [nene@sbox.tugraz.at](mailto:nene@sbox.tugraz.at)

Man könnte also der *root locus* als diejenige Kontur zeichnen, welche die Winkelbedingung erfüllt. Abbildung 1 zeigt den so entstandenen *root locus*, wenn man ein System mit

$$G(s) = \frac{(s + 0.4)(s + 30)}{s^2(s + 10)(s + 50)(s^2 + s + 10)}$$

und  $H = 1$  betrachtet.

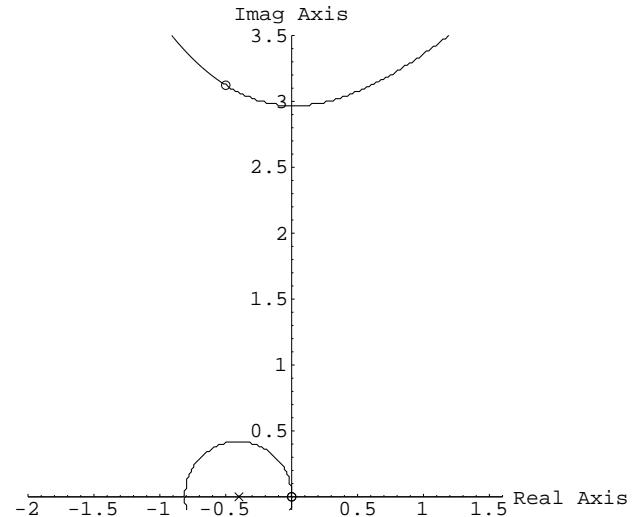


Abb. 1. Root Locus für  $G(s) = \frac{(s+0.4)(s+30)}{s^2(s+10)(s+50)(s^2+s+10)}$

## II. PHASE-ROOT LOCUS (PRL)

Das Konzept von *phase-root locus* wurde bereits in Jahre 1992 angesprochen [1], aber man verwarf die Idee wegen mangelnder Zeichenvorschrift und, weil man die Information in dieser als nicht verwendbar erachtete. [2] führte den *phase-root locus* ein.

Mit der heutzutage vorhanden Rechenleistung eines normalen PCs braucht man keine Zeichenvorschrift mehr. Es reicht lediglich zu wissen, was der *phase-root locus* darstellen soll.

Der *phase-root locus* stellt die Polstellen des geschlossenen Kreises in der  $s$ -Ebene dar, wenn man Phase addiert (oder subtrahiert) und die addierte Verstärkung konstant gleich Null lässt.

Daraus ergibt sich eine einfache Betragsbedingung:

$$|k_m GH(s_{PRL})| = 1$$

Beachte, dass hier die Verstärkung  $k$  sehr wohl vorkommt.

Man könnte also der *phase-root locus* als diejenige Kontur zeichnen, welche die Betragsbedingung erfüllt. Abbildung 2 zeigt den *phase-root locus* für das gegebene System mit der Verstärkung  $k_m = 80$  zusammen mit dem *root locus*.

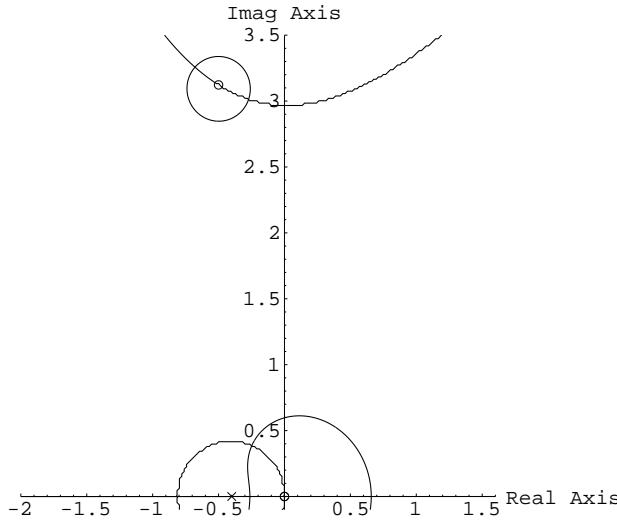


Abb. 2. Phase-Root Locus für  $k_m = 80$  und Root Locus

Die Schnittpunkte zwischen *root locus* und *phase-root locus* ergeben die Polstellen des geschlossenen Regelkreises mit der Verstärkung  $k_m = 80$ .

Sei jetzt  $N_p$  die Anzahl der Polstellen, bzw.  $N_z$  die Anzahl der Nullstellen, die vom *phase-root locus* umschlossen werden, dann bewegt sich der *phase-root locus*, und damit die Polstellen des geschlossenen Regelkreises, im Uhrzeigersinn um die Polstellen, falls  $N_p > N_z$  bzw. im Gegenuhrzeigersinn, falls  $N_p < N_z$  gilt. Ist  $N_p = N_z$ , dann werden die Polstellen nicht umschlossen.

Im vorliegenden Fall werden sich also die Polstellen des geschlossenen Regelkreises im Uhrzeigersinn bewegen.

Die Dualität zwischen *root locus* und *phase-root locus* wird deutlicher, wenn man mehrere Konturen zeichnet. Abbildung 3 zeigt den Verlauf von mehreren Konturen, die Konstante Phase aufweisen.

$$\arg GH(s_{RL}) = \text{const}$$

Die dicken Linien entsprechen dem *root locus*, der bei einer (konstanten) Phase von  $\pi$  entsteht.

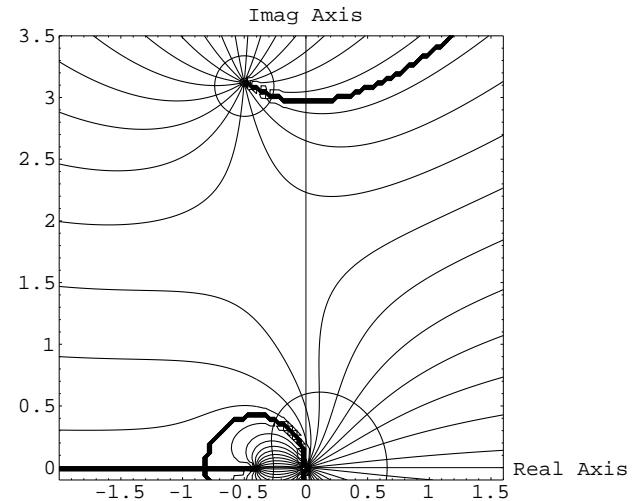


Abb. 3. Konturen für konstanten Phase und Phase-Root Locus für  $k_m = 80$

Abbildung 4 zeigt den Verlauf von mehreren Konturen, die konstanten Betrag aufweisen.

$$|k_m GH(s_{PRL})| = \text{const}$$

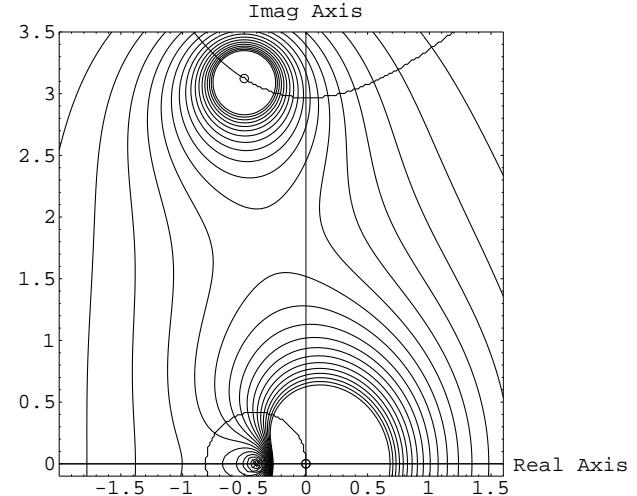


Abb. 4. Konturen für konstanten Betrag und Root Locus

Wie bereits erwähnt, ergeben die Schnittpunkte von *root locus* und *phase-root locus* die Polstellen des geschlossenen Kreises, denn nur diese erfüllen die Gleichung

$$k_m GH(s_{CL}) = -1$$

### III. PHASE-ROOT LOCUS UND RELATIVE STABILITÄT

Sowohl beim *root locus* als auch beim *phase-root locus* stellt die  $j\omega$ -Achse die Stabilitätsgrenze dar,

denn eine Polstelle des geschlossenen Regelkreises, die in die rechte  $s$ -Halbebene wandert, führt zu einem instabilen System.

### A. Gain Margin (GM)

Die Stabilitätsgrenze kann entlang des *root locus* bei  $k_0$  bzw. bei  $s = j\omega_{pc}$  überschritten werden, wobei  $\omega_{pc}$  die *phase crossover* Frequenz darstellt.

Das *gain margin* in dB für  $k = k_m$  lautet dann:

$$GM_{dB}(k_m) = 20 \log \left( \frac{k_0}{k_m} \right)$$

Setzt man jetzt  $k_0 = \frac{1}{|GH(j\omega_{pc})|}$  ein, dann folgt:

$$\begin{aligned} GM_{dB}(k_m) &= 20 \log(k_0) - 20 \log(k_m) \\ &= -20 \log(|GH(j\omega_{pc})| k_m) \end{aligned}$$

Addiert man jetzt  $M$  dB Verstärkung zu  $k_m GH(s)$ , wobei  $M < GM_{dB}(k_m)$ , dann bleibt die Polstelle des geschlossenen Regelkreises stabil.

Abbildung 5 zeigt den *phase-root locus* für  $k_m = 80$  im Bereich der oberen Polstelle. Hier erkennt man, dass  $j\omega_{pc} = j2.97$ , so dass  $\frac{1}{k_0} = |G(j\omega_{pc})| = 0.00613$ . Damit gilt  $GM_{dB}(80) = 6.18$  dB

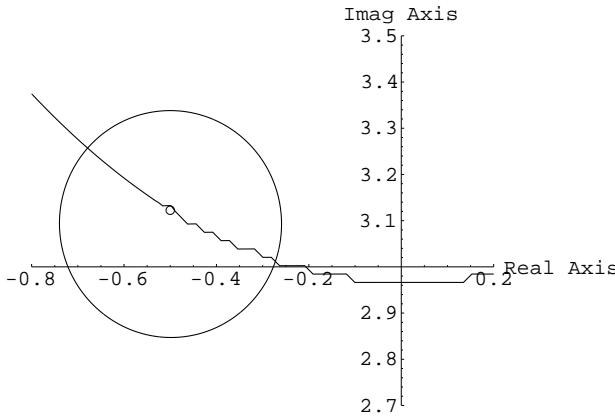


Abb. 5. Phase-Root Locus für  $k_m = 80$  und Root Locus

### B. Phase Margin (PM)

Die Stabilitätsgrenze kann aber auch entlang des *phase-root locus* bei  $\varphi_0$  bzw. bei  $s = j\omega_{gc}$  überschritten werden, wobei  $\omega_{gc}$  die *gain crossover* Frequenz darstellt.

Das *phase margin* für  $k = k_m$  lautet analog zur GM dann:

$$\begin{aligned} PM(k_m) &= \varphi_0 - (-\pi) \\ &= \varphi_0 + \pi \\ &= \arg\{GH(j\omega_{gc})\} + \pi \end{aligned}$$

Addiert man jetzt eine negative Phase  $\theta$  zu  $GH(s)$ , wobei  $-\theta < PM(k_m)$ , dann bleibt die Polstelle des geschlossenen Regelkreises stabil.

Abbildung 6 zeigt den *phase-root locus* für  $k_m = 80$  im Bereich der unteren Polstelle. Hier erkennt man, dass  $j\omega_{gc} = j0.6$ , so dass  $\varphi_0 = \arg\{G(j\omega_{gc})\} = 130.227^\circ$ . Damit gilt  $PM(80) = 49.773^\circ$ .

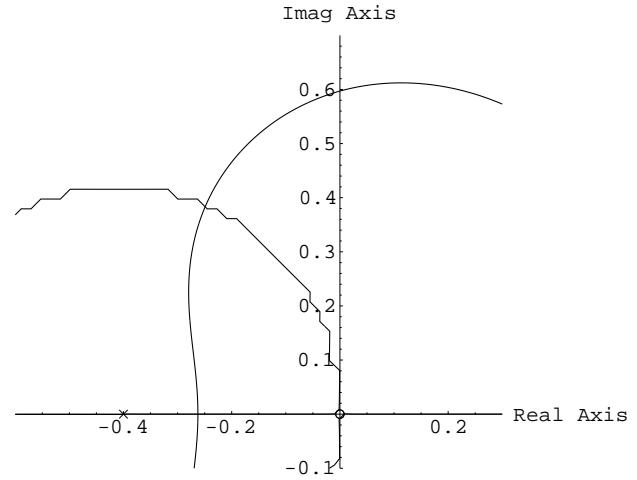


Abb. 6. Phase-Root Locus für  $k_m = 80$  und Root Locus

### C. Gain-Critical Pole

Abbildung 7 Zeigt den Verlauf des *phase-root locus* für  $k = 150$ . An den Schnittpunkten des *phase-root locus* und des *root locus* erkennt man, wo die Polstellen des geschlossenen Regelkreises liegen.

Dabei erkennt man, dass der Pol im oberen Bereich durch die Addition von (negativer) Phase nicht instabil wird (Bewegung auf dem Kreis im Uhrzeigersinn). Eine kleine Addition von Verstärkung macht ihn aber sehr wohl instabil.

Dies ist ein so genannter *gain-critical pole*, der bei einer kleinen Addition von Verstärkung in die rechte  $s$ -Halbebene wandert und das System instabil macht.

### D. Phase-Critical Pole

Abbildung 8 Zeigt den Verlauf des *phase-root locus* für  $k = 5$ . An den Schnittpunkten des *phase-root locus* und des *root locus* erkennt man, wo die Polstellen des geschlossenen Regelkreises liegen.

Dabei erkennt man, dass der Pol im unteren Bereich durch die Addition von Verstärkung nicht instabil wird (Bewegung auf dem größeren Kreis im

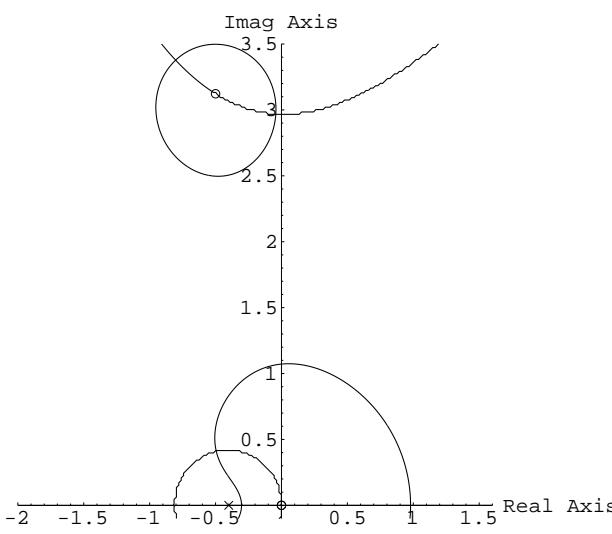


Abb. 7. Phase-Root Locus für  $k = 150$  und Root Locus

Gegenuhrzeigersinn). Addiert man hingegen (negative) Phase dazu (Bewegung auf dem kleineren Kreis in Uhrzeigersinn), dann wird der Pol sehr wohl instabil

Dies ist ein so genannter *phase-critical pole*, der bei einer kleinen Addition von (negativer) Phase in die rechte  $s$ -Halbebene wandert und das System instabil macht.

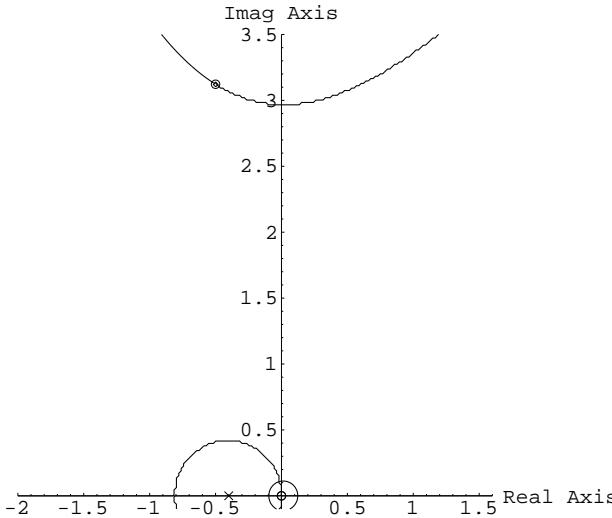


Abb. 8. Phase-Root Locus für  $k = 5$  und Root Locus

Betrachtet man also gleichzeitig den *root locus* und den *phase-root locus*, dann wird es deutlich, dass ein großes *gain margin* und ein kleines *phase margin* oder umgekehrt durchaus vorkommen können bzw., wo die Ursachen dafür liegen.

#### IV. PHASE-ROOT LOCUS UND ZEITVERHALTEN

Aussagen über das Zeitverhalten (Sprungantwort) des Systems sind auch möglich, wenn man *root locus* und *phase-root locus* gemeinsam betrachtet

- Ist der *root locus* horizontal beim (dominanten) Pol, dann wird die Einstellzeit von einer Änderung der Verstärkung beeinflusst, nicht aber das Überschwingen.
- Ist der *phase-root locus* vertikal beim Pol des geschlossenen Kreises, dann wird die Einstellzeit nicht von einer Änderung der Phase beeinflusst, während das Überschwingen sehr wohl beeinflusst wird.

#### V. ZUSAMMENFASSUNG

Anhand einiger Beispiele wurden die Eigenschaften des *root locus* und des *phase-root locus* erläutert:

- Der *root locus* ermöglicht die Untersuchung des Verhaltens der Polstellen des geschlossenen Kreises in Abhängigkeit von der Verstärkung.
- Der *root locus* zeigt das *gain margin* bzw. die *phase crossover* Frequenz.
- Der *phase-root locus* ermöglicht die Untersuchung des Verhaltens der Polstellen des geschlossenen Kreises in Abhängigkeit von der Phase.
- Der *phase-root locus* zeigt das *phase margin* bzw. die *gain crossover* Frequenz.
- Der *root locus* und der *phase-root locus* im Kombination ermöglichen Aussagen über die relative Stabilität des geschlossenen Regelkreises und über das Zeitverhalten (die Sprungantwort) des Systems.

Ein Notebook (nb-File) zu diesem Artikel findet man im Web:

<http://www.cis.tugraz.at/ieee/ik/Juli-2002/objektiv.html>

Die hier zitierten Artikel stehen im Campus der TU-Graz über das IEEE Xplore (<http://www.ieee.org/ieeexplore>) zur Verfügung.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] M.L. Nagurka, T.R. Kurfess, "Gain and Phase Margins of SISO Systems from Modified Root Locus Plots," *IEEE Control Systems Magazine*, June 1992
- [2] T.J. Cavicci, "Phase-Root Locus and Relative Stability", *IEEE Control Systems Magazine*, August 1996