Objektiv Denken IV: Nichtlineare Regelungstechnik & *Mathematica*

Ernesto Rico-Schmidt

Kurzfassung— **In diesem Artikel widmen wir uns ein Problem der nichtlinearen Regelungstechnik (eine Hausübung zur Systemtheorie-2 Vorlesung[1]) zu, wobei diesmal nicht Matlab, sondern *Mathematica* zum Einsatz kommt.**

I. Die Aufgabenstellung

Gegeben sei ein nichtlinearer Standardregelkreis mit

$$G(s) = \frac{50}{s\,(5+s)\,(1+s)}$$

1. Bestimmen Sie mit Hilfe des *Nyquist*-Kriteriums den zugehörigen *Hurwitz*-Sektor.
2. Ermitteln Sie mit dem *Popov*-Kriterium eine möglichst großen Sektor, in dem der Regelkreis absolut stabil ist. Ist die *Aizermann*-Vermutung im vorliegenden Fall gültig?
3. Ermitteln Sie mit dem Kreiskriterium (möglichst große) Sektoren der absoluten Stabilität.

II. *Mathematica*

Mathematica ist ein sehr leistungsfähiges Programmpaket, das besonders für ihre symbolischen Fähigkeiten geschätzt wird, obwohl die numerischen und graphischen nicht unterschätzt werden sollen.

In diesem konkreten Fall werden insbesondere die symbolischen Fähigkeiten für die Lösung von Gleichungen, die Bestimmung von Limes, und die symbolische Differentiation, sowie die graphischen für die Darstellung der verschiedenen Kurven genutzt.

Bei der Lösung der gegebenen Aufgaben werden kurz die notwendigen *Mathematica*-Befehle präsentiert. Ein ausführliches *Notebook* steht in der Web Site von *increase your knowledge* zum Download bereit.

III. Die Lösung

A. Nyquist-*Kriterium*

Für das lineare Teilsystem gilt $N_r = 0$ und $N_a = 1$, d.h das Nyquist-Kriterium lautet dann:

$$\Delta \arg\{1 + k\,G(j\,\omega)\} = \pi$$

Wir können nun bestimmen, wo Nyquist-Ortskurve

$$G(j\,\omega) = \frac{50}{5\,j\,\omega - 6\,\omega^2 - j\,\omega^3}$$

die reelle Achse scheidet.

Mathematica

In[1]:= `G[s_] = 50/( s (5+s) (1+s) ) // ExpandAll`

Out[1]:= $\frac{50}{5s+6s^2+s^3}$

In[2]:= `w0 = Solve[ 0==ComplexExpand[ Im[G[I w]] ], w]`

Out[2]:= $\{\{w \to -\sqrt{5}\}, \{w \to \sqrt{5}\}\}$

In[3]:= `G[ I w] /. w0[[2]] // Simplify`

Out[3]:= $-\frac{5}{3}$

Die Ortskurve schneidet also die reelle Achse bei $w = \sqrt{5}$ bzw. $G(j\omega) = -\frac{5}{3}$. Für $k = \frac{2}{5}$ gilt

$$\Delta \arg\{1 + k\,G(j\,\omega)\} = \pi$$

Man kann dann zeigen, daß das Nyquist-Kriterium für $0 < k < \frac{3}{5}$ erfüllt ist, denn dann verläuft die Nyquist-Ortskurve rechts vom Punkt $s = -1$.

Nun zeichnen wir den Verlauf der Nyquist-Ortskurve für verschiedene Werte von k.

Mathematica

In[4]:=
```
ParametricPlot[
 Evaluate[ {Re[k G[I w]], Im[k G[I w]]} /. k->2/5 ],
 {w, 0, 1000} , PlotRange->{{-2.5, 0.5}, {-2.5, 0.5}}
]
```

In[5]:=
```
ParametricPlot[
 Evaluate[ {Re[k G[I w]], Im[k G[I w]]} /. k->4/5 ],
 {w, 0, 1000} , PlotRange->{{-2.5, 0.5}, {-2.5, 0.5}}
]
```

Abbildung 1 zeigt den Verlauf von $k\,G(j\,\omega)$ für $k = \frac{2}{5}$ und $k = \frac{4}{5}$.

Die Führugsübertragungsfunktion und das daraus resultierende charakteristische Polynom können einfach bestimmt werden:

Mathematica

In[6]:= `T[s_] = (k G[s]) / (1 + k G[s]) // Simplify`

Out[6]:= $\frac{50k}{50k+s(5+6s+s^2)}$

In[7]:= `p[s] = Denominator[ T[s] ] // Expand`

Out[7]:= $50k + 5s + 6s^2 + s^3$

Für das *Routh*-Schema ergibt sich dann:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 5 & 0 \\ 6 & 50\,k & 0 \\ \frac{30-50\,k}{6} & 0 & \\ 50\,k & & \end{array}$$

email: *nene@sbox.tugraz.at*

[1] Näheres zur Vorlesung und Übung findet man im Web unter: https://online.tugraz.at/tug_online/lv.detail?corg=2331&clvnr=69799, https://online.tugraz.at/tug_online/lv.detail?corg=2331&clvnr=69445

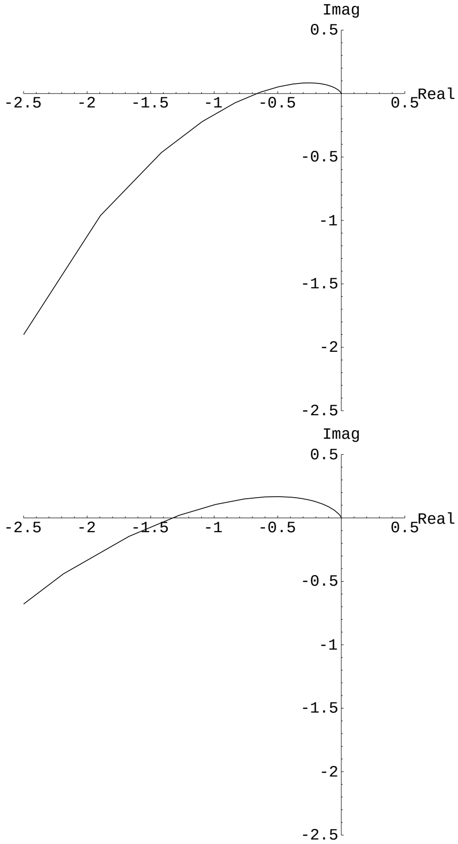

Abb. 1. *Nyquist*-Ortskurven für $k = \frac{2}{5}$ und $k = \frac{4}{5}$.

Man erkennt, daß damit $p(s)$ ein Hurwitz-Polynom wird, es gelten muß

$$\begin{aligned} 50\,k &> 0 \\ 30 - 50\,k &> 0 \end{aligned}$$

daraus folgt für den Hurwitz-Sektor die Bedingung $0 < k < \frac{3}{5}$.

B. Popov-*Kriterium*

Für die Popov-Ortskurve gilt:

$$P(j\,\omega) = -\frac{300\,\omega^2}{36\,\omega^4 + (5\,\omega - \omega^3)^2} + j\,\omega\,\frac{-250\,\omega + 50\,\omega^3}{36\,\omega^4 + (5\,\omega - \omega^3)^2}$$

Diese schneidet die reelle Achse ebenfalls bei $-\frac{5}{3}$ und beginnt bei $s = -12 - j\,10$. Dies kann einfach mit *Mathematica* ermittelt werden.

Mathematica

```
In[8]:= P[w_] =
 ComplexExpand[ Re[G[I w]],
 TargetFuncions->{Re, Im} ] +
 I w ComplexExpand[ Im[G[I w]],
 TargetFuncions->{Re, Im} ]
In[9]:= Limit[
{ComplexExpand[Re[P[w]]],
 ComplexExpand[Im[P[w]]]}, w->0 ]
Out[9]:= {-12, -10}
In[10]:= Limit[
{ComplexExpand[Re[P[w]]],
 ComplexExpand[Im[P[w]]]}, w->Infinity ]
Out[10]:= {0, 0}
```

Man legt dann die Popov-Gerade so, daß sie diesen Punkt auch schneidet und ein möglichst großes k erzeugt. In diesem Fall gilt:

$$y = \frac{1}{q}\,x + \frac{1}{k\,q} = \frac{4}{5}\,x + \frac{4}{3}$$

Es gilt also $q = \frac{5}{4}$ und $k = \frac{3}{5}$.

Mathematica

```
In[11]:= ParametricPlot[
 {Re[P[I w]], Im[P[I w]]}, {w, 0, 1000},
 PlotRange->{{-2.5, 1},{-2.5, 1}} ]
In[12]:= ParametricPlot[
 {t, 4/5 t + 4/3}, {t, -2.5, 0},
 PlotRange->{{-2.5, 1},{-2.5, 1}} ]
In[13]:= Show[ %, %% ]
```

Abbildung 2 zeigt den Verlauf von $P(j\,\omega)$ und die zugehörige Popov-gerade.

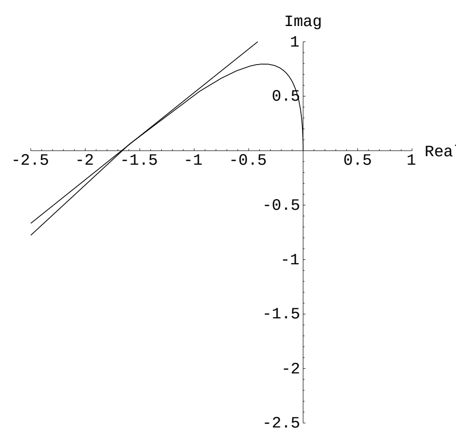

Abb. 2. *Popov*-Ortskurve und *Popov*-Gerade

Man erkennt, daß die *Aizermann*-Vermutung in diesem Fall gültig ist, denn das System ist absolut stabil im Sektor $[0, \frac{3}{5}]$. Dieses Ergebnis ist einem Satz von *Bergen* und

Williams enthalten, der wiederum von *G. Schmidt* und *G. Preusche* verallgemeinert wurde [1].

Satz 1: Ein nichtlinearer Standardregelkreis ist im *Hurwitz*-Sektor absolut stabil, wenn das lineare Teilsystem die Ordnung 3 hat und der Zähler des linearen Teilsystems konstant ist oder genau eine Nullstelle aufweist, während die Pole in der linken offenen Halbebene liegen, mit etwaiger Ausnahme eines einfachen Poles bei Null.

C. Kreiskriterium

Nach einer Sektortransformation ist das System

$$G^\star(s) = \frac{50}{s^3 + 6\,s^2 + 5\,s + 50\,k_1}$$

für jedes $k_1 > 0$ grenzstabil. Man sucht dann nach einem Kreis, gegeben durch $(x-m)^2 + y^2 = r^2$, mit

$$m = -\frac{1}{2}(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}),\ r = \frac{1}{2}(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2})$$

der zu einem möglichst großen Sektor $k_2 - k_1$ führt.

Mathematica

In[14]:= `x = ComplexExpand[ Re[G[I w]], TargetFunctions->{Re, Im}]`

Out[14]:= $-\frac{300\omega^2}{36\omega^4+(5\omega-\omega^3)^2}$

In[15]:= `x = ComplexExpand[ I[G[I w]], TargetFunctions->{Re, Im}]`

Out[15]:= $-\frac{250\omega^2}{36\omega^4+(5\omega-\omega^3)^2} + -\frac{50\omega^3\omega^2}{36\omega^4+(5\omega-\omega^3)^2}$

In[16]:= `dx = D[x, w] // Simplify`

Out[16]:= $\frac{1200\omega(13+\omega^2)}{(25+26\omega^2+\omega^4)}$

In[17]:= `dy = D[y, w] // Simplify`

Out[17]:= $-\frac{50(-125-415\omega^2+\omega^4+3\omega^6)}{\omega^2(25+26\omega^2+\omega^4)^2}$

In[18]:= `m = -1/2 (1/k1 + 1/k2)`

In[19]:= `r = 1/2 (1/k1 - 1/k2)`

In[20]:= `k = Solve[ {(m-x) dx - y dy == 0, (x-m)^2+y^2 == r^2}, {k1, k2}]`

In[21]:= `wk = Solve[D[k2-k1 /. k[[2]], w] == 0, w]`

Out[21]:= $\{\{\omega \to 0\}, \{\omega \to -\sqrt{\frac{5}{3}}\},\ \{\omega \to \sqrt{\frac{5}{3}}\}, \{\omega \to -j\sqrt{\frac{26}{3}}\},\ \{\omega \to -j\sqrt{\frac{26}{3}}\}\}$

In[22]:= `{x, y} /. wk[[3]]`

Out[22]:= $\{-\frac{135}{32}, -\frac{15\sqrt{15}}{32}\}$

Damit haben wir die Frequenz $\omega_k = \sqrt{\frac{5}{3}}$ und den Punkt x, y, bestimmt, wo sich die Ortskurve und der Kreis schneiden, und zu dem größtmöglichen Sektor $k_2 - k_1$ führt. Dieser entsteht aus der Normal zur Ortskurve bei der Frequenz ω_k.

Es ergibt sich dann $k_1 = 0.1139$ und $k_2 = 2.6406$, bzw. ein Kreis mit Mittelpunkt $m = -6.1363$ und Radius $r = 2.6406$. Das System ist demnach absolut stabil im Sektor $[0, 2.5267]$. Wir können nun die Ortskurve und den Kreis zeichnen.

Mathematica

In[23]:= `ParametricPlot[ {Re[G[I w]], Im[G[I w]]}, {w, 0, 1000}, PlotRange-> {{-15.5, 0.5}, {-15.5, 0.5}} ]`

In[24]:= `Graphics[ Circle[{m, 0}, r] ]`

In[25]:= `Show[ %, %% ]`

Abbildung 3 zeigt die Nyquist-Ortskurve und den zugehörigen Kreis.

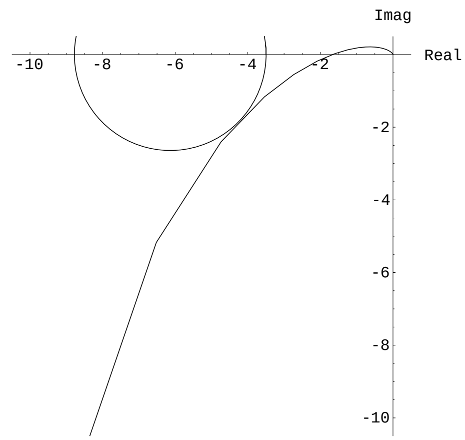

Abb. 3. Kreiskriterium, $m = -6.1363$, $r = 2.6406$.

IV. Zusammenfassung

Wir haben kurz anhand eines Beispiels die Möglichkeit gezeigt, Probleme der nichtlinearen Regelungstechnik, bzw. der Vorlesung Systemtheorie-2 mit Hilfe von *Mathematica* zu lösen.

Ein Notebook (nb-File) zu diesem Beispiel findet man im Web:
http://www.cis.tugraz.at/ieee/ik/Februar-2001/objektiv.html

Schrifttum

[1] Otto Föllinger. *Nichtlineare Regelungen II.* R. Oldenbourg-Verlag 1993